

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

ХАКИМОВ АНВАР ФАНИСОВИЧ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ БПЛА.

Направление: 01.04.02

Прикладная математика и информатика

Магистерская программа: Методы прикладной математики и информатики в задачах управления.

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Шиманчук Д.В.

Санкт-Петербург

2018

Содержание

1	Введение	2
2	Постановка задачи	3
3	Обзор литературы	4
4	Математические модели движения БПЛА	5
4.1	Математическая модель неуправляемого движения БПЛА .	5
4.2	Математическая модель управляемого движения	6
4.3	Упрощенная математическая модель	10
5	Методы поиска управлений	13
5.1	Обратная задача динамики	13
5.2	Поиск управлений в форме обратных связей	14
6	Задача управления движением летательного аппарата	16
6.1	Математическая модель движения БПЛА	16
6.2	Задача поиска программных управлений	18
6.3	Поиск условно-оптимальной траектории	21
6.4	Поиск управлений в форме обратных связей	23
7	Компьютерное моделирование	25
7.1	Реализация компьютерной модели	25
7.2	Результаты моделирования	26
8	Выводы	32
9	Заключение	33
10	Список литературы	34

1 Введение

При решении задачи поиска управлений беспилотного летательного аппарата (БПЛА), обладающего высокими требованиями к характеристикам полёта, обнаруживается проблема обеспечения требуемой надежности управления. Однако из-за пренебрежения сложными программными режимами управления, несовершенства линий связи и, кроме того, ошибок в пилотировании при использовании ручного управления современные практические разработки имеют высокую степень аварийности.

Для решения данной проблемы в данной работе предполагается воспользоваться методами концепции обратных задач динамики систем управления, управления с обратными связями и теории оптимального управления. Подход такого рода дает возможность использовать при программировании полёта БПЛА траекторный подход, заменяя тем самым координатно-временные графики движения беспилотника.

Предлагаемый подход позволит рассматривать существующую задачу движения как задачу терминального движения и выбрать требуемую условно-оптимальную траекторию полёта БПЛА. После чего, используя методы теории обратных задач динамики возможно найти управления для движения по необходимой траектории движения. А дальнейшее добавление к управлению замыкания обратными связями поможет избежать расхождение желаемой и реальной траекторий движения.

В настоящее время, когда область для применения БПЛА быстро растет, исследование задачи по его управлению несомненно является как никогда актуальной. И правда, беспилотные летательные аппараты используют для: доставки грузов, аэрофотосъемки, спасательных работ, охраны объектов, мониторинга местности. И данный список только растет.

2 Постановка задачи

В рамках работы необходимо исследовать задачу управляемого движения БПЛА и провести численное моделирование движения беспилотного летательного аппарата на основе полученных математических методов управления. На основе результатов сделать выводы о практической адекватности используемых подходов.

Общий план работы можно представить следующим списком:

1. Исследовать математическую модель движения БПЛА;
2. Рассмотреть математические методы поиска управлений;
3. Синтезировать метод поиска условно-оптимальной траектории;
4. Описать общую структуру метода управления;
5. Сконструировать реализующий метод управления алгоритм полёта БПЛА;
6. Получить практическую реализацию алгоритма управления;
7. Проанализировать результаты численного моделирования движения на основе предложенной теории.

3 Обзор литературы

В [1] приведена математическая модель движения БПЛА, способ построения траектории движения, вычисляемой с помощью начальных условий задачи. Кроме того, описана практическая реализация метода построения управлений, замкнутыми обратными связями.

Метод расчета t -параметрической траектории полёта беспилотного летательного аппарата и пример построения такой траектории для маневра смены эшелона представлен в [2]. Дополнительно показана возможность использования таких траекторий.

Общая математическая теория решения задач управления для линейных систем можно найти в [3]. Основными рассматриваемыми задачами являются: задача управления динамической системой при минимуме оценки управляющих воздействий и задача наблюдения.

В [4],[5] представлена обширная теория применения концепции обратных задач динамики для решения проблем автоматического управления нелинейных динамических систем. Интересным фактором является то, что описанные алгоритмы управления используют принцип управления по ускорению.

Основные подходы к практическому решению задач управления БПЛА предложено в [6]. Сформулированы базовые принципы прикладной теории управления БПЛА и описаны основные типы возникающих задач и методов их решения.

В [7] можно найти информацию о построении имитационной модели удержания БПЛА на расчетной траектории. Так же представлен необходимый для её реализации алгоритм.

Обширная документация по применению пакета MATLAB вместе со средой моделирования Simulink приведена в [8].

4 Математические модели движения БПЛА

4.1 Математическая модель неуправляемого движения БПЛА

Летательный аппарат самолетного типа рассматривается как твердое тело, которое имеет шесть степеней свободы, в которых имеется три вида поступательных движений центра масс и три вида вращательного движения относительно центра масс.

Модель движения центра масс БПЛА, представленные в скоростной системе координат, опишем в следующем виде:

$$\begin{cases} m\dot{V} = \sum F_x; \\ mV\omega_z = \sum F_y; \\ mv \cos \theta \omega_y = \sum F_z. \end{cases} \quad (1)$$

Для описания вращения БПЛА относительно его центра масс в связанной системе координат в основном используют следующие уравнения:

$$\begin{cases} J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = M_x; \\ J_y\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z = M_y; \\ J_z\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = M_z. \end{cases} \quad (2)$$

В вышеприведенных равенствах: J_x, J_y, J_z - главные центральные моменты инерции тела, действующие относительно осей системы координат, связанной с телом, M_x, M_y, M_z - суммы проекций моментов всех действующих сил на соответствующие оси, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - угловые скорости вращательного движения тела, рассчитанные относительно соответствующих осей связанной системы координат, $V = V(t)$ - скорость движения тела, $\dot{V} = \dot{V}(t)$ - производная скорости объекта по времени, m - масса тела, $\theta = \theta(t)$ - величина угла наклона траектории движения, $\sum F_x, \sum F_y, \sum F_z$ - векторные суммы проекций всех сил, которые действуют на БПЛА относительно соответствующих осей скоростной системы координат.

Приведем уравнения, необходимые для согласования применяемых при описании движения объекта систем координат[6]:

$$\begin{cases} \sin \theta = \cos \alpha \cos \beta \sin \vartheta - (\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma) \cos \vartheta; \\ \sin \Psi \cos \theta = \cos \alpha \cos \beta \sin \theta \cos \vartheta + \sin \alpha \cos \beta (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma) - \\ - \sin \beta (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma); \\ \sin \gamma_c \cos \theta = \cos \alpha \sin \beta \sin \vartheta - \cos \vartheta (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma). \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \theta \cos \Psi; \\ \dot{y} = V \sin \theta; \\ \dot{z} = V \cos \theta \sin \Psi. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma}{\cos \vartheta}; \\ \dot{\vartheta} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma; \\ \dot{\gamma} = \omega_x - \tan \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma). \end{cases} \quad (5)$$

В этих уравнениях используются следующие обозначения: x, y, z - координаты тела в земной системе координат, α, β - углы скольжения и атаки объекта, ϑ, ψ, γ - углы тангажа, рыскания и крена БПЛА, Ψ - угол поворота траектории БПЛА.

Вообще говоря, приведенные выше пятнадцать уравнений описывают пространственное движение неуправляемого БПЛА в земной системе координат. А из того, что порядок системы совпадает количеством неизвестных функций, можно сделать вывод, что имеется замкнутая система.

4.2 Математическая модель управляемого движения

Чтобы получить модель управляемого движения БПЛА к уравнениям из прошлого пункта (1) - (5) добавим уравнения углов отклонения органов непосредственного управления, которые имеют влияние на правые части уравнений, а значит на траекторию движения тела.

Органы управления БПЛА классической схемы могут влиять на следующие параметры движения тела:

- δ_n - угол отклонения руля направления, влияет на величину угловой скорости ω_y , угла рыскания ψ и момента M_y ;
- δ_e - угол отклонения элеронов, влияет на величину угловых скоростей ω_x, ω_y , угла крена γ и момента M_x, M_y ;
- δ_v - угол отклонения руля высоты, влияет на величину угловой скорости ω_z , угла тангажа ϑ и момента M_z .

Кроме того, на практике угол δ_n будет положительным при отклонении руля направления вправо, а углы δ_v, δ_e положительны при отклонениях соответствующих органов управления вниз.

Приведенная модель движения тела, которая состоит из нелинейной системы дифференциальных уравнений пятнадцатого порядка, вообще говоря, имеет высокую сложность решения и сложно применима для непрерывного управления БПЛА.

На практике обычно используют упрощенные модели управляемого полёта летательного аппарата. Поэтому, при решении задач движения, будем считать объект управления материальной точкой, имеющей массу m , чьё движение соответствует соотношениям 1 и 4.

Для исключения остальных уравнений введем некоторые предположения.

Во время реального движения тела, из-за его колебаний вокруг центра масс, изменение управляющих органов $\delta_n \neq 0, \delta_e \neq 0, \delta_v \neq 0$ не вызывает мгновенного соответствующего изменения углов α, β, γ , а только через определенный промежуток времени. Этот отрезок времени называют временем переходных процессов летательного аппарата по каналам крена, тангажа, рысканья.

Предположим, что при эффективном управлении БПЛА, время переходных процессов достаточно мало и установка углов α, β, γ происходит мгновенно после смены положения необходимых рулей управления объекта. Это можно обосновать тем, что движения центра масс имеет значительную инерционность, в то время как колебания вокруг центра масс дает в сравнение небольшие девиации траектории движения.

Имея ввиду данное предположение, возможно считать объект управления вращающимся без вращения, что соответствует следующим уравнениям:

$$J_x = J_y = J_z = 0. \quad (6)$$

После чего, используя выражение 2 имеем:

$$M_x = M_y = M_z = 0. \quad (7)$$

Что, в общем-то, и означает малость времени переходных процессов. Беспилотный летательный аппарат, для которого выполняются условия (7) во время всего движения, называют устойчивым сбалансированным объектом.

Угловые скорости примем подчиняющимися следующим равенствам: $\omega_y = \dot{\Phi}, \omega_z = \dot{\theta}$, тогда уравнения (1) преобразуются в следующий вид:

$$\begin{cases} m\dot{V} = \sum F_x; \\ mV\dot{\theta} = \sum F_y; \\ mv \cos \theta \dot{\Phi} = \sum F_z. \end{cases} \quad (8)$$

Найдем конкретное выражение сил из правой части уравнения. На БПЛА при движении имеют влияние данные силы: P - тяга двигателя, X - лобовое сопротивление, Y - подъемная сила, Z - боковая сила и $G = mg$ - сила тяжести.

Проекция суммы сил, действующих на тело при движении, на ось x представима следующим образом:

$$\sum F_x = P \cos \alpha - X - G \sin \theta. \quad (9)$$

Проекция суммы сил на ось y имеет вид:

$$\sum F_y = P \sin \alpha + Y - G \cos \theta. \quad (10)$$

Изменение скорости движения тела $V(t)$ получается за счет сил урав-

нения (9). Для поворота вектора скорости $V(t)$ относительно центра масс на угол θ между скоростной и земной системой координат происходит за счет изменений сил системы (10).

Для поворота вектора скорости $V(t)$ относительно оси y на угол Φ найдем силы, находящиеся в сумме $\sum F_z$.

Пусть БПЛА движется с сохранением некоторой постоянной высоты полёта. Для совершения бокового маневра необходимо повернуть руль направления δ_n на некоторый угол, при котором возникнет боковая сила Z .

Другим способом совершения бокового движения, является изменение руля элеронов δ_e и возникающего вследствие этого изменения угла крена γ .

Рассмотрим лежащую на оси y результирующую всех сил силу R , чье значение выражается в виде:

$$R = Y + P \sin \alpha. \quad (11)$$

Тогда изменения угла Φ и, соответственно, изменение ориентации вектора скорости $V(t)$ возникает из-за воздействия следующей силы:

$$Z^* = (Y + P \sin \alpha) \sin \gamma + Z \cos \gamma. \quad (12)$$

Кроме того, при возникновении крена управляемого объекта, появляется угол скольжения β , следовательно общий вид равнодействующей силы по оси z имеет вид:

$$\sum F_z = \cos \gamma (-P \cos \alpha \sin \beta + Z) + \sin \gamma (P \sin \alpha + Y). \quad (13)$$

Следовательно, уравнения (8) с использованием выражений действующих по осям сил (9) - (13) примут следующий вид:

$$\begin{cases} m\dot{V} = P \cos \alpha \cos \beta - X - mg \sin \theta; \\ mV\dot{\theta} = (P \sin \alpha + Y) \cos \gamma - (Z - P \cos \alpha \sin \beta) \sin \gamma - mg \cos \theta; \\ mV \cos \theta \dot{\Phi} = (P \sin \alpha + Y) \sin \gamma + (Z - P \cos \alpha \sin \beta) \cos \gamma. \end{cases} \quad (14)$$

Практические наблюдения показали, что используемые в уравнениях углы α, β ограничены сверху 20° .

Нетрудно вычислить, что $\cos 20^\circ = 0.940, \sin 20^\circ = 0.342$. Поэтому с ошибкой не более шести процентов можно использовать следующее приближение $\cos \alpha \approx 1, \cos \beta \approx 1$. Кроме того, с ошибкой, не превышающей два процента на данном интервале углов справедливо, что $\sin \alpha \approx \alpha, \sin \beta \approx \beta$.

Полученные значения погрешности в общем-то являются допустимыми в инженерных расчетах, поэтому модель движения центра масс в виде системы уравнений (14) с использованием данных приближений запишем следующим образом:

$$\begin{cases} m\dot{V} = P \cos \alpha \cos \beta - X - mg \sin \theta; \\ mV\dot{\theta} = (P\alpha + Y) \cos \gamma - (Z - P\beta) \sin \gamma - mg \cos \theta; \\ mV \cos \theta \dot{\Phi} = (P\alpha + Y) \sin \gamma + (Z - P\beta) \cos \gamma. \end{cases} \quad (15)$$

В полученной упрощенной системе (15) под управлениями будем иметь ввиду вектор следующего вида:

$$u(t) = (P(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma(t)). \quad (16)$$

4.3 Упрощенная математическая модель

Полученную в предыдущем параграфе модель можно дополнительно упростить. Отметим следующие интересные нам свойства:

- Боковой способ маневрирования БПЛА, то есть плоский разворот при нулевом угле крена γ , в следствии конструкции фюзеляжа и малой площади вертикального оперения летательного аппарата, которые при малых углах β не могут создать, необходимую для обеспечения обеспечивающей движение маневренности, достаточную боковую аэродинамическую силы Z , практически не используется;
- При разработке большинства БПЛА, на практике считают, что осуществление бокового маневрирования происходит за счет изменения

угла крена $\gamma \neq 0$, предполагая, что $\beta = 0, Z = 0$;

- Кроме того, обозначим угол между осью двигателя и строительной осью летательного аппарата углом ϕ установки двигателя. Обычно при проектировке данный угол выбирается таким образом, чтобы обеспечить продольную устойчивость движения. Далее введем этот угол в систему.

Приняв во внимания вышеприведенные факты и уравнения (15), запишем модель движения в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{P - X}{m} - g \sin \theta, t \in [t_0, t_k]; \\ \dot{\theta} = \frac{(P(\alpha + \phi) + Y) \cos \gamma}{mV} - \frac{g \cos \theta}{V}; \\ \dot{\Phi} = \frac{(P(\alpha + \phi) + Y) \sin \gamma}{mV \cos \theta}; \\ \dot{x} = V \cos \theta \cos \Phi; \\ \dot{y} = V \sin \theta; \\ \dot{z} = V \cos \theta \sin \Phi. \end{cases} \quad (17)$$

Для данной системы дифференциальных уравнений величины исходного положения тела в пространстве в виде начальных условий представим следующим образом:

$$x(t_0) = x_0; y(t_0) = y_0; z(t_0) = z_0; \theta(t_0) = \theta_0; \Phi(t_0) = \Phi_0; V(t_0) = V_0; \quad (18)$$

Полученная система 17 состоит из шести уравнений и имеет девять неизвестных функций. Законы управления тягой $P = P(t)$, углом атаки $\alpha = \alpha(t)$ и углом крена $\gamma = \gamma(t)$, определенные на $t \in [t_0, t_k]$ обеспечивают движение по необходимой траектории полёта объекта управления.

Используя (17) с начальными условиями (18) имеем замкнутую систему, решение которой можно получить численным интегрированием.

Полученное решение, при определенной на интервале $[t_0, t_k]$ функции управления $u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t))$, назовем моделированием управляемого движения беспилотного летательного аппарата.

Удобно представить модель движения объекта управления (17) в воздействующих на тело перегрузках.

Проекции перегрузки на оси запишем в следующем виде:

$$n_x = \frac{P - X}{mg}; n_y = \frac{P(\alpha + \phi) + Y}{mg}; n_z = \frac{Z - P\beta}{mg} \quad (19)$$

После подстановки (19) в модель движения (17) получим систему уравнений в безразмерной форме следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{V} = gn_x - g \sin \theta; \\ \dot{\theta} = \frac{gn_y \cos \gamma - g \cos \theta}{V}; \\ \dot{\Phi} = \frac{gn_y \sin \gamma}{V \cos \theta}, \end{cases} \quad (20)$$

где функция управления имеет следующий вид:

$$u(t) = (n_x(t), n_y(t), \gamma(t)).$$

5 Методы поиска управлений

Проблему поиска управлений в общих словах можно описать следующим образом. Имеем некий объект на который можно влиять управляющими воздействиями. Кроме того, определено желаемое движение, к примеру начальное и конечное состояние объекта. Так же могут быть заданы условия на качество процесса, представляющие собой обычно требование получения максимума или минимума какого-либо свойства системы. Задача состоит в нахождении управляющих воздействий, которые способны реализовать заданное движение.

Основными типами задач по поиску управлений обычно выделяют следующие:

1. Задача о поиске программного управления. Имеется информация о начальном состоянии объекта, необходимо найти функцию управления, которая за заданное время приводит систему к определенному состоянию;
2. Задача о конструировании системы с обратной связью. В этом случае необходимо получать улучшенный закон управления, который регулируется в зависимости от текущего состояния объекта в каждый момент времени.

5.1 Обратная задача динамики

Задачу поиска управлений для движения объекта вида:

$$\ddot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t), t \in [t_0, t_*], \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \dot{\mathbf{x}}_0, \quad (21)$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ - n - мерный вектор переменных состояния, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ - m - мерная управляющая функция.

Необходимо найти управления $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$, которые обеспечивают на временном интервале $[t_0, t_*]$ следующие условия:

$$x_j(t) = \theta_j(t), \dot{x}_j(t) = \dot{\theta}_j(t), \ddot{x}_j(t) = \ddot{\theta}_j(t), j = \overline{1, n}. \quad (22)$$

Здесь $\theta_j = \theta_j(t)$ - наперед заданные функции, дважды дифференцируемые по времени. Кроме того на функции управления $u_k(t), k = \overline{1, m}, t \in [t_0, t_*]$ могут быть заданы ограничения.

Задачу данного вида называют обратной задачей управления динамическим объектом[4].

Для решения данной задачи с найдем необходимые управления в виде:

$$\mathbf{u}^*(t) = f^{-1}(\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta). \quad (23)$$

После подстановки в математическую модель движения объекта по назначенной траектории получим:

$$\ddot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, f^{-1}(\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta)). \quad (24)$$

5.2 Поиск управлений в форме обратных связей

В предыдущем параграфе мы рассматривали задачу о поиске управляющего воздействия $\mathbf{u}(t)$ на основе заранее фиксированных условий на траекторию движения. Задачи подобного вида называют обычно проблемой поиска программного управления. Что по сути означает, что движение происходит по некой программе, определенной заранее вычисленным управлением $\mathbf{u}(t)$. Однако в этом кроется и главный недостаток данного подхода. В случае возникновения возмущения вектора состояния $\mathbf{x}(t)$ в некий момент времени $t = t$, то заранее заданное управление $\mathbf{u}(t)$ будет осуществлять с данного момента времени движение уже по некоторой смещенной траектории $\theta = \theta(t)$. И данное смещение может оказаться достаточно существенно.

Поэтому разумно при формировании управления $\mathbf{u}(t)$ учитывать дополнительную информацию о ходе движения в каждый момент времени. Именно таким образом строиться управление в форме обратной связи. Общий смысл которого заключается в следующем: управление $\mathbf{u}(t)$ в каждый момент времени определяется на основании информации о текущем состоянии объекта в этот момент[3]. Общая схема принципа изображена на рис.

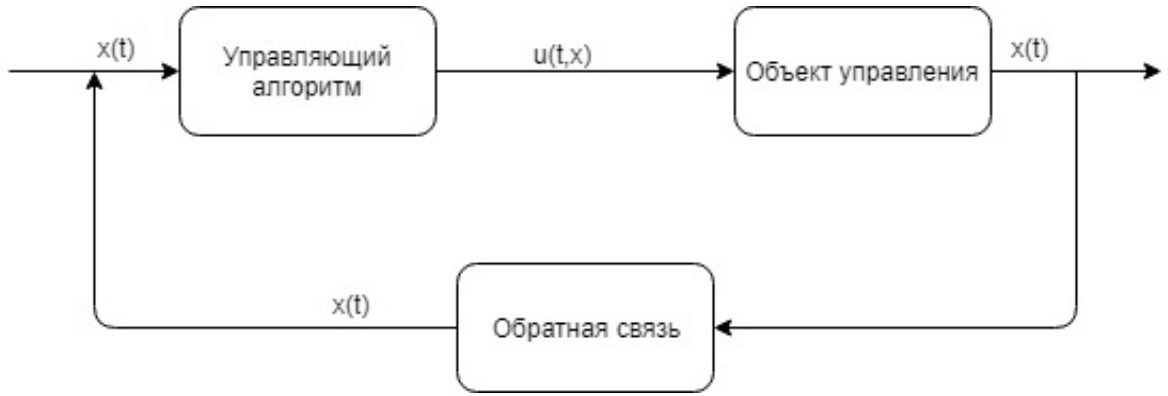


Рис. 1: Схема принципа управления с обратной связью.

(1).

Пусть определена система (21) и соответствующее программное управление $\mathbf{u}_p(t)$ соответствующее условиям (22). Тогда управление с замыканием обратными связями будем искать в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$. Обозначим отклонение движения от заданной траектории в виде: $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_p(t)$ и предположим, что оно удовлетворяет следующему уравнению[5]:

$$\ddot{\mathbf{z}} + K_1 \dot{\mathbf{z}} + K_2 \mathbf{z} = 0. \quad (25)$$

Тогда после подстановки в (25) двух систем вида (21) с подставленными неизвестным управлением $\mathbf{u}(t)$ и программным управлением $\mathbf{u}_p(t)$ получим управление в виде обратных связей следующего вида:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = H(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_p, \dot{\mathbf{x}}_p, \mathbf{u}_p). \quad (26)$$

6 Задача управления движением летательного аппарата

6.1 Математическая модель движения БПЛА

Для введения математической модели движения БПЛА введем необходимые системы координат. Расположим начало нормальной земной системы координат O в произвольно выбранной точке земной поверхности. После чего направим ось OY таким образом, чтобы она была направлена по местной вертикале противоположно направлению силы тяжести. А в горизонтальной плоскости расположим оси OX, OZ так, чтобы в совокупности с OY являлись правой системой координат. При решении задачи, пренебрежем вращением Земли и её кривизной. Кроме того, будем считать, что система координат инерциальна, а её ориентация остается постоянной.

Нормальную систему координат O_tXYZ получим после переноса начала нормальной земной системы координат в точку центра масс БПЛА. Траекторную систему координат $O_tX_tY_tZ_t$ получим из нормальной переносом на углы наклона траектории θ и пути ψ . Изображение описанной системы координат предложено на рис. 2. Модель полёта беспилотника будем представлять системой, состоящей из шести дифференциальных уравнений, которую предложено использовать в [1].

$$\begin{cases} \dot{H} = V \sin \vartheta; \\ \dot{L} = V \cos \vartheta \cos \psi; \\ \dot{Z} = -V \cos \vartheta \sin \psi; \\ \dot{V} = g(n_x - \sin \vartheta); \\ \dot{\vartheta} = \frac{g(n_y \cos \gamma - \cos \vartheta)}{V}; \\ \dot{\psi} = -\frac{g(n_y \cos \gamma - \cos \vartheta)}{V \cos \vartheta}. \end{cases}$$

Здесь L и Z - продольная и боковая дальность, H - высота, ψ - угол курса, ϑ - угол наклона траектории, γ - угол крена, V - путевая скорость, n_x, n_y - продольная и поперечная перегрузка, g - ускорение свободного падения.

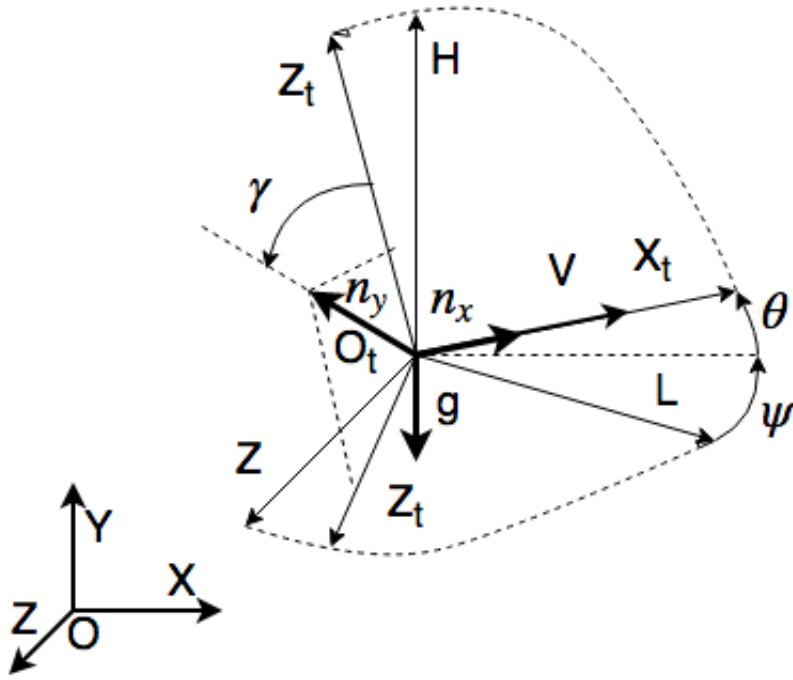


Рис. 2: Траекторная система координат.

Высоту, продольную и боковую дальность, углы курса, наклона траектории и путевую скорость будем считать фазовыми координатами. Перегрузки n_x, n_y и угол крена γ являются управляющими воздействиями.

Несложно заметить, что предлагаемая система является нелинейной, поэтому для её упрощения проведем некоторые замены переменных. После подстановки виртуальных управлений в следующем виде в исходную систему:

$$u_1 = n_x, u_2 = n_y \cos \gamma, u_3 = n_y \sin \gamma \quad (27)$$

будем иметь систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{H} = V \sin \vartheta; \\ \dot{L} = V \cos \vartheta \cos \psi; \\ \dot{Z} = -V \cos \vartheta \sin \psi; \\ \dot{V} = g(u_1 - \sin \vartheta); \\ \dot{\vartheta} = g\left(\frac{u_2}{V} - \frac{\cos \vartheta}{V}\right); \\ \dot{\psi} = -g \frac{u_3}{V \cos \vartheta}. \end{cases} \quad (28)$$

После чего, используя обратимую замену переменных:

$$y_1 = H, y_2 = L, y_3 = Z, y_4 = \dot{y}_1, y_5 = \dot{y}_2, y_6 = \dot{y}_3$$

в результате имеем систему в виде трёх дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = g(u_1 \sin \vartheta + u_2 \cos \vartheta - 1); \\ \ddot{y}_2 = g(u_1 \cos \vartheta \cos \psi - u_2 \sin \vartheta \cos \psi + u_3 \sin \psi); \\ \ddot{y}_3 = g(-u_1 \cos \vartheta \sin \psi + u_2 \sin \vartheta \sin \psi + u_3 \cos \psi). \end{cases} \quad (29)$$

И соотношения между переменными:

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{y_4}{V}; \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{y_5^2 + y_6^2}}{V}; \\ \sin \psi = -\frac{y_6}{\sqrt{y_5^2 + y_6^2}}; \\ \cos \psi = \frac{y_5}{\sqrt{y_5^2 + y_6^2}}; \\ V = \sqrt{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2}. \end{cases} \quad (30)$$

Необходимо сказать, что данная замена переменных является обратимой только в случае выполнения следующих неравенств:

$$V > 0, |\theta| < \frac{\pi}{2}, -\pi < \psi < \pi.$$

6.2 Задача поиска программных управлений

Будем считать что в начальный момент времени состояние БПЛА представлено в следующем виде:

$$\begin{cases} H|_{t=t_0} = H_0, L|_{t=t_0} = L_0, Z|_{t=t_0} = Z_0; \\ V|_{t=t_0} = V_0, \vartheta|_{t=t_0} = \vartheta_0, \psi|_{t=t_0} = \psi_0, \end{cases} \quad (31)$$

а действующие в данный момент управления:

$$n_x|_{t=t_0} = n_{x0}, n_y|_{t=t_0} = n_{y0}, \gamma|_{t=t_0} = \gamma_0. \quad (32)$$

Необходимо построить управления, при которых к определенному моменту времени t_* по некоторой траектории $\mathbf{y}(t) = \mathbf{p}(t)$ осуществится движения беспилотника в конечное состояние записанное в следующем виде:

$$\begin{cases} H|_{t=t_*} = H_*, L|_{t=t_*} = L_*, Z|_{t=t_*} = Z_*; \\ V|_{t=t_*} = V_*, \vartheta|_{t=t_*} = \vartheta_*, \psi|_{t=t_*} = \psi_*; \end{cases} \quad (33)$$

с действующими в данный момент управлениями:

$$n_x|_{t=t_*} = n_{x*}, n_y|_{t=t_*} = n_{y*}, \gamma|_{t=t_*} = \gamma_*. \quad (34)$$

Для решения описанной задачи воспользуемся принципом обратной задачи динамики. На первом шаге определим желаемую траекторию движения согласно требованиям, налагаемым граничными условиями (31)- (34). А на втором найдем необходимые для движения БПЛА управления.

Согласно уравнениям математической модели полета можем определить конкретные значения граничных условий. В итоге получим:

$$\begin{cases} y_{1j} = H_j, y_{2j} = L_j, y_{3j} = Z_j, \\ \dot{y}_{1j} = V_j \sin \theta_j, \dot{y}_{2j} = V_j \cos \theta_j \cos \psi_j, \dot{y}_{3j} = -V_j \cos \theta_j \sin \psi_j; \\ \ddot{y}_{1j} = -g + u_{1j} \sin \theta_j + u_{2j} g \cos \theta_j; \\ \ddot{y}_{2j} = u_{1j} g \cos \theta_j \cos \psi_j - u_{2j} g \sin \theta_j \cos \psi_j + u_{3j} g \sin \psi_j; \\ \ddot{y}_{3j} = -u_{1j} g \cos \theta_j \sin \psi_j + u_{2j} g \sin \theta_j \sin \psi_j + u_{3j} g \cos \psi_j; \\ j \in \{0, *\}. \end{cases} \quad (35)$$

Траекторию движения, удовлетворяющую граничным условиям предложенного выше вида, будем искать в виде полиномов пятой степени. Степень полиномов выбрана за счет того, что на каждую функцию действует шесть условий. Для удобства будем рассматривать полиномы на отрезке $[0, 1]$ положив $\delta = t_* - t_0, p_i(\tau) = y_i(t_0 + \delta), i = \overline{1, 3}$. Тогда условия наложенные на

многочлен находятся в следующем виде:

$$\begin{cases} p_i(j) = y_{ij}, \dot{p}_i(j) = \dot{y}_{ij}\delta, \ddot{p}_i(j) = \ddot{y}_{ij}\delta^2; \\ i = \overline{1, 3}, j \in \{0, 1\}. \end{cases} \quad (36)$$

Имеем три полинома вида: $p_i(\tau) = \alpha_5\tau^5 + \alpha_4\tau^4 + \dots + \alpha_0$. При $\tau = 0$ из (36) получим

$$\begin{cases} \alpha_0 = y_{i0}; \\ \alpha_1 = \dot{y}_{i0}\delta; \\ \alpha_2 = \frac{1}{2}\ddot{y}_{i0}\delta^2. \end{cases} \quad (37)$$

А при $\tau = 1$ из (36) получим значения остальных коэффициентов:

$$\begin{cases} \alpha_3 = 10(y_{i*} - y_{i0}) - 2\delta(3\dot{y}_{i0} + 2\dot{y}_{i*}) - \frac{\delta^2}{2}(3\ddot{y}_{i0} - \ddot{y}_{i*}); \\ \alpha_4 = 15(y_{i0} - y_{i*}) + \delta(8\dot{y}_{i0} + 7\dot{y}_{i*}) + \frac{3\delta^2}{2}(3\ddot{y}_{i0} - 2\ddot{y}_{i*}); \\ \alpha_5 = 6(y_{i*} - y_{i0}) - 3\delta(\dot{y}_{i0} + \dot{y}_{i*}) - \frac{\delta^2}{2}(\ddot{y}_{i0} - \ddot{y}_{i*}). \end{cases} \quad (38)$$

Данные значения вычисляются из системы линейных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = y_{i*} - y_{i0} - \dot{y}_{i0}\delta - 0.5 * \ddot{y}_{i0}\delta^2; \\ 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 = \dot{y}_{i*}\delta - \dot{y}_{i0}\delta - \ddot{y}_{i0}\delta^2; \\ 6\alpha_3 + 12\alpha_4 + 20\alpha_5 = \ddot{y}_{i*}\delta^2 - \ddot{y}_{i0}\delta^2, \end{cases} \quad (39)$$

которое имеет единственное решение, так как её определитель не равен нулю.

В итоге получены желаемые траектории движения БПЛА. Найдем программные управления для движения по данной траектории решением системы (29) относительно управлений. После чего имеем программные управ-

ления в следующем виде:

$$\begin{cases} u_1 = \sin \vartheta + \frac{\ddot{y}_1 \sin \vartheta + \ddot{y}_2 \cos \vartheta \cos \psi - \ddot{y}_3 \cos \vartheta \sin \psi}{g}; \\ u_2 = \cos \vartheta + \frac{\ddot{y}_1 \cos \vartheta - \ddot{y}_2 \sin \vartheta \cos \psi + \ddot{y}_3 \sin \vartheta \sin \psi}{g}; \\ u_3 = \frac{\ddot{y}_2 \sin \psi + \ddot{y}_3 \cos \psi}{g}. \end{cases} \quad (40)$$

6.3 Поиск условно-оптимальной траектории

При построении траекторий движения БПЛА в виде полиномов конкретный выбор времени маневра δ не осуществлялся. Однако данный параметр оказывает сильное влияние на характер полученной траектории. В [2] описываются некоторые алгоритмы выбора этого параметра, но при этом отмечается, что его определение несет эмпирический характер. В практическом применении БПЛА разумно требовать того, чтобы время полёта между точками было минимально. Поэтому разумно найти траекторию с минимальным временем полёта. Однако при уменьшении времени полёта абсолютная величина управляющих воздействий и необходимых скоростей возрастает, что в итоге приводит к практической нереализуемости такого движения. Поэтому в данной работе предлагается найти некоторое значение времени маневра, которое будет минимально, но при этом полученное движение будет отвечать некоторым ограничениям.

Имеем целевую функцию вида:

$$J(t_0, t_*) = \int_{t_0}^{t_*} dt \rightarrow \min \quad (41)$$

И наложенные на нее условия вида:

$$\begin{cases} |u_i| < U_{i,max}, i = \overline{1,3}; \\ V_{min} < V < V_{max}; \\ |\vartheta| < \frac{\pi}{2}; \\ |\psi| < \pi. \end{cases} \quad (42)$$

Необходимо найти такое время полёта при котором (41) будет минимальным, но при этом выполняются все условия (42). Решение такой задачи будем искать с помощью численных методов. Для начала переформулируем задачу. Коэффициенты различных траекторий составляют однопараметрическое семейство коэффициентов полиномов:

$$\alpha_i^j = \alpha_i^j(\delta), i = \overline{1, 3}, j = \overline{0, 5}. \quad (43)$$

С накладываемыми на них условиями:

$$\begin{cases} |u_i(t, \{\alpha_i^j\})| < u_{i,max}; \\ V_{min} < V(t, \{\alpha_i^j\}) < V_{max}; \\ i = \overline{1, 3}, j = \overline{0, 5}, t \in [t_0, t_*]. \end{cases} \quad (44)$$

Задача: необходимо найти минимальное δ при выполнении условий (44). Опишем используемый численный метод поиска минимального времени маневра. Алгоритм сводится к следующим этапам:

1. Для начала найдем минимально допустимое время полёта, для этого воспользуемся следующей формулой:

$$t_{min} = \sqrt{(H_* - H_0)^2 + (L_* - L_0)^2 + (Z_* - Z_0)^2} / V_{max},$$

где V_{max} - максимально допустимая конструкцией БПЛА скорость;

2. Будем увеличивать минимально допустимое время на некоторый малый шаг $t = t_{min} + h$. На каждом шаге проверим условия (44) и будем продолжать увеличивать время до первого момента выполнения всех условий;
3. На последнем этапе проверим выполнение условий на траекторию при уменьшении времени с изменяющимся шагом $h = h/2$. Шаг уменьшается в момент, когда траектория перестает удовлетворять поставленным условиям. Однако шаг не может уменьшиться больше некоторой наперед заданной величины. Последний момент времени при котором выполнялись условия и считается минимальным.

Общую схему алгоритма можно видеть на следующей картинке:

Algorithm 1 Поиск оптимальной траектории

```

1:  $t = t_0$ 
2: while  $\text{not}(Cond)$  do
3:    $trajectory = \text{computeTrajectory}(t)$ 
4:    $Cond = \text{prooveCond}(trajectory)$ 
5:    $t = t + step$ 
6: end while
7: while  $Cond$  do
8:    $t = t - backStep$ 
9:    $trajectory = \text{computeTrajectory}(t)$ 
10:   $Cond = \text{prooveCond}(trajectory)$ 
11:  if  $backStep/2 > \text{minBackStep} \text{AND} \text{not}(Cond)$  then
12:     $t = t + backStep$ 
13:     $backStep = backStep/2$ 
14:     $Cond = TRUE$ 
15:  end if
16: end while

```

6.4 Поиск управлений в форме обратных связей

Движение, реализованное с использованием программных управлений, зачастую является отклоняющимся от программной траектории[7]. Это происходит в основном из-за неточности математической модели, численных ошибок и различных внешних факторов. Для коррекции возможных отклонений от заданной траектории воспользуемся методологией управления в форме обратных связей.

Математическую модель полёта (29) запишем в матричной форме

$$\ddot{\mathbf{y}} = A_1 + A_2(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})\mathbf{u}, \quad (45)$$

где:

$$\begin{cases} \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)', \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)', A_1 = -g(1, 0, 0)', \\ A_2(y, \dot{y}) = g \begin{pmatrix} \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ \cos \vartheta \cos \psi & -\sin \vartheta \cos \psi & \sin \psi \\ -\cos \vartheta \sin \psi & \sin \vartheta \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \end{cases}$$

Пусть $\mathbf{y}_p(t), \mathbf{u}_p(t)$ -программная траектория движения беспилотника и программные управления, его реализующие. Такие векторы согласуются с уравнением:

$$\ddot{\mathbf{y}}_p = A_1 + A_2(\mathbf{y}_p, \dot{\mathbf{y}}_p)\mathbf{u}_p. \quad (46)$$

Пусть отклонение между программной и реализованной траекторией $\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_p(t)$ удовлетворяют следующему уравнению:

$$\ddot{\mathbf{z}} + K_1\dot{\mathbf{z}} + K_2\mathbf{z} = 0, \quad (47)$$

где K_1, K_2 диагональные матрицы, элементы которых выбраны таким образом, чтобы характеристические корни уравнений системы располагались в правой части комплексной плоскости, что дает асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия при условии $t \rightarrow 0$. Что дает нам $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{y}_p(t), \dot{\mathbf{y}}(t) \rightarrow \dot{\mathbf{y}}_p(t)$ при $t \rightarrow 0$. Далее подставим (45), (46) в (47) и после некоторых преобразований получим уравнения для нахождения управлений в форме обратных связей:

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \frac{1}{g^2} A_2^T(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) A_2(\mathbf{y}_p, \dot{\mathbf{y}}_p) \mathbf{u}_p - \frac{1}{g^2} A_2^T(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) (K_1(\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_p) + K_2(\mathbf{y} - \mathbf{y}_p)). \quad (48)$$

Данные управления и будем использовать для регулирования движения БПЛА по заданной траектории. А в следующей главе работы практически покажем причину недостаточности использования только программных управлений.

3. На третьем этапе в блоке «ProgramControlCompute» вычисляются программные управления, соответствующие текущему моменту времени;
4. Далее в блоке «ControlsCompute» с использованием программных управлений вычисляются уже управления в форме обратных связей;
5. После чего в блоке «DECompute» в математическую модель движения БПЛА подставляются полученные управления, после чего с помощью двух блоков-интеграторов получаем новое положение объекта управления в пространстве;
6. После этого вычисляется следующий момент времени и повторяются все этапы начиная со второго. Вычисление заканчивается когда текущий момент времени становится равен конечному времени для выполнения данного движения.

7.2 Результаты моделирования

Проведем серию вычислительных экспериментов по моделированию полёта беспилотника по различным траекториям. Первым исследуемым движением будет маневр смены эшелона. Все необходимые данные для его осуществления приведем в следующей таблице 2:

Таблица 1: Данные для выполнения маневра набора высоты.

	V, м/с	θ , град	ψ , град	H, м	L, м	Z, м	n_x	n_y	γ , град
$t_0 = 0$ сек	40	0	0	600	0	0	0	1	0
$t_* = 22.1$ сек	45	15	0	1300	800	300	0	1	0
V_{min} , м/с	V_{max} , м/с	u_{max}							
20	65	2.5							

Далее приведем результаты моделирования. На рис. 4 приведена траектория реализованного полёта БПЛА. Изменение ориентации объекта управления во время выполнения маневра представлено на рис. 5, изменение скорости полёта на рис. 6. Необходимые для проведения маневра управления отображены на рис. 8. А на рис. 7 изображено изменение отклонения БПЛА от заданной траектории движения.

Моделирование проводилось в среде MATLAB/Simulink. Для интегрирования системы дифференциальных уравнений использовался метод ode45 с переменным шагом [8]. А расчет управлений в форме обратных связей выполнялся с коэффициентами стабилизации $k_{i1} = 10, k_{i2} = 10, i = \overline{1, 3}$.

Из полученных данных можно сделать некоторые выводы. Во первых, полученные результаты дают представление о том, что граничные условия, поставленные на задачу, выполняются для реализованной траектории движения.

Во вторых, как можно заметить на рис. 7, отклонение реализованного движения от предполагаемой расчетной траектории невелико и стремиться к нулю при $t \rightarrow +\infty$. А на рис. 9 явно видно, что использование программных управлений без замыкания их обратными связями приводит к чрезмерному расхождению полученной и заданной траектории. Приведенные фактические данные подтверждают теоретические выкладки о характере движения.

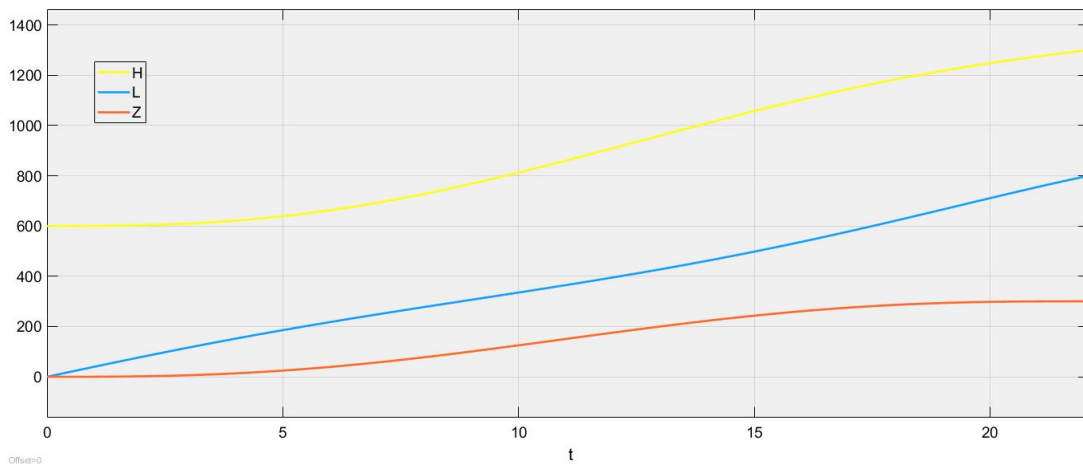


Рис. 4: График изменения координат во времени.

Следующим движением будет маневр разворота. Необходимые для данного маневра исходные данные представлены в таблице 2.

Приведем полученные результаты. График движения центра масс БПЛА отображен на рис. 10. На рис. 11 и 12 приведены соответственно графики изменения углов и скорости во время движения. Необходимые для движения управления можно видеть на рис. 13. На рис. 14 изображен график отклонения от расчетной траектории. На рис. 15 приведен общий вид

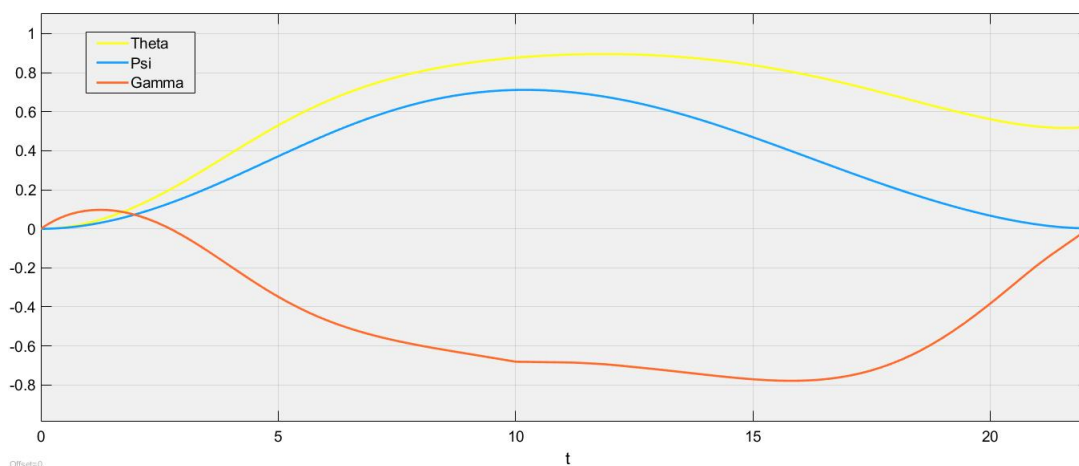


Рис. 5: График изменения углов во времени.

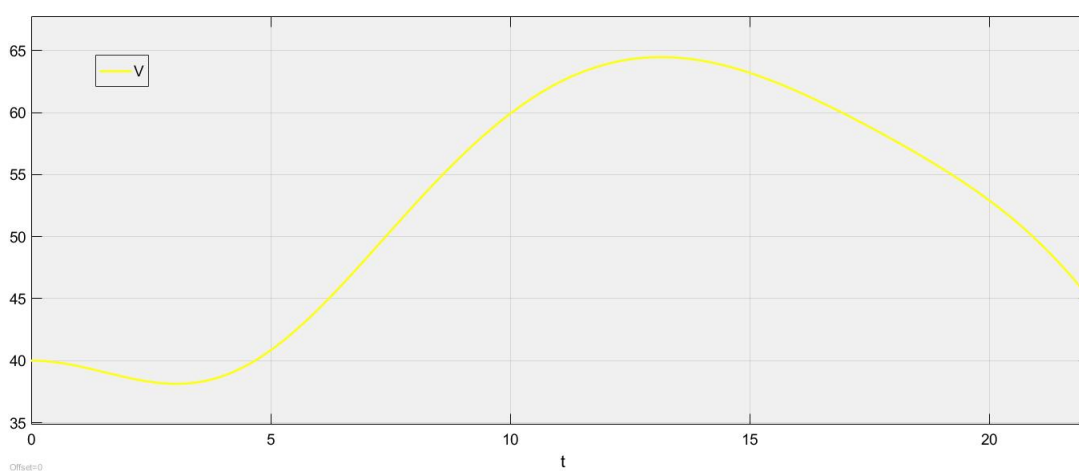


Рис. 6: График изменения скорости во времени.

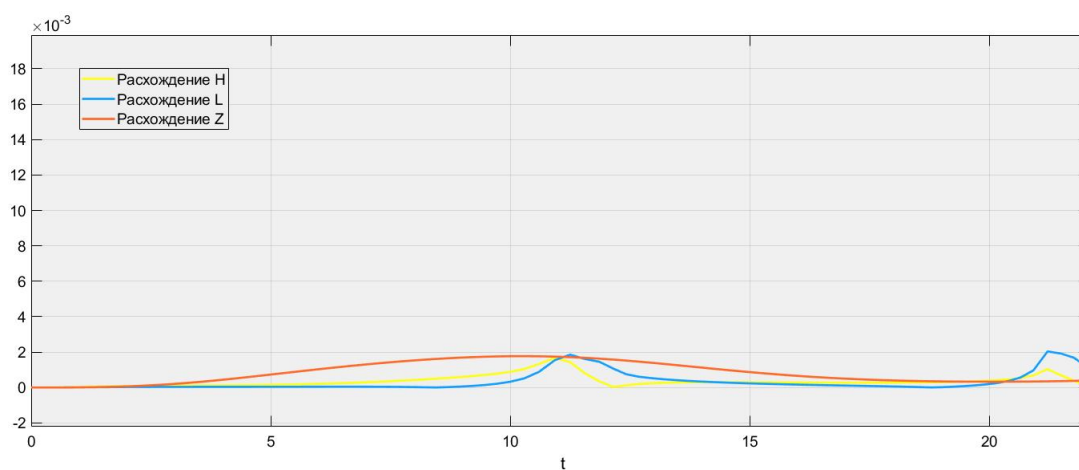


Рис. 7: График изменения ошибки траектории полёта во времени.

траекторий полёта: желаемой, реализованной на программных управлениях и реализованной на управлениях в форме обратной связи.

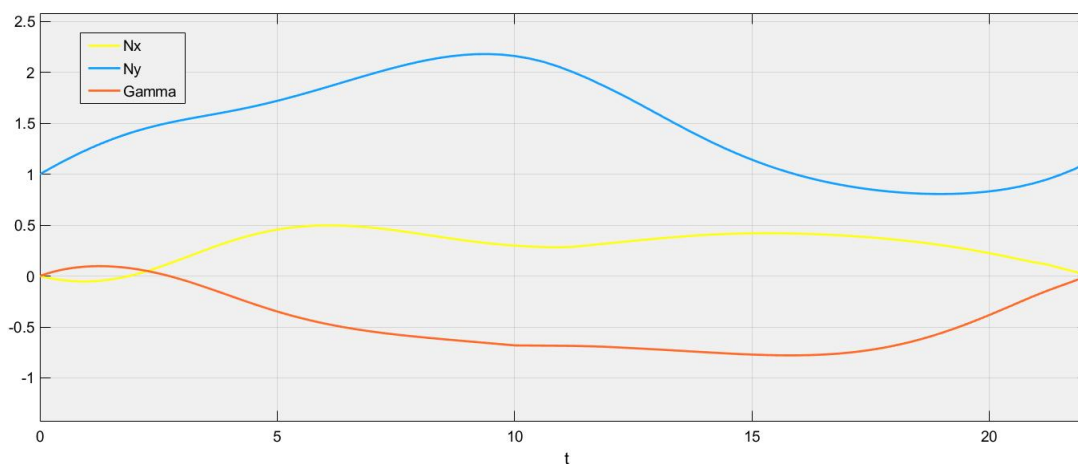


Рис. 8: График изменения управлений во времени.

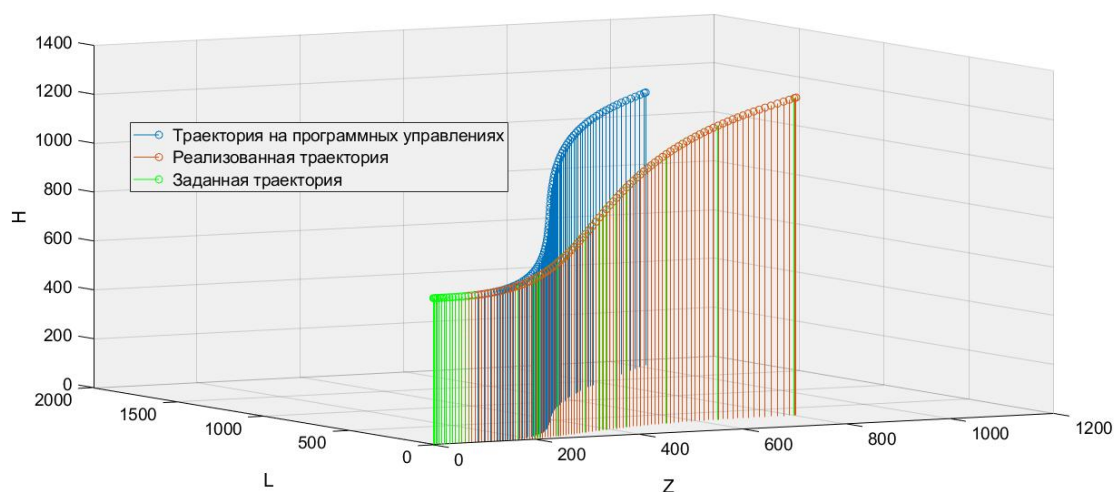


Рис. 9: Траектория полёта

Таблица 2: Данные для выполнения маневра разворота.

	V , м/с	θ , град	ψ , град	H , м	L , м	Z , м	n_x	n_y	γ , град
$t_0 = 0$ сек	50	0	0	900	0	0	0	1	0
$t_* = 12.9$ сек	50	0	180	1100	900	-600	0	1	0
V_{min} , м/с	V_{max} , м/с	u_{max}							
20	100	2							

Как видно из полученных результатов для двух программ движения БПЛА полученные движения и их характеристики удовлетворяют условиям задания движения в таблицах 1 и 2. А использование управления в форме обратных связей, в отличие от использования только программных управлений, обеспечивает движение близкое к заданному. Кроме того, ограничения, налагаемые при поиске оптимальной траектории, выполня-

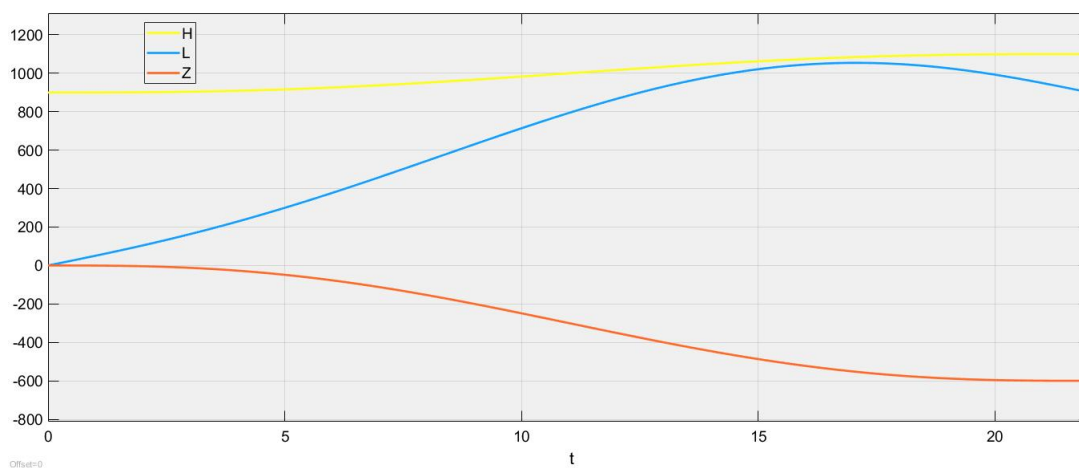


Рис. 10: График изменения координат во времени.

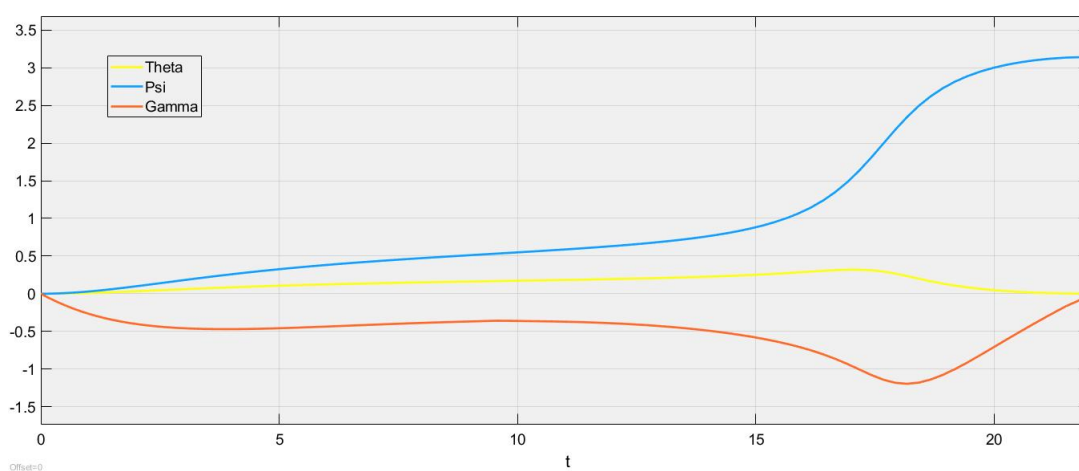


Рис. 11: График изменения углов во времени.

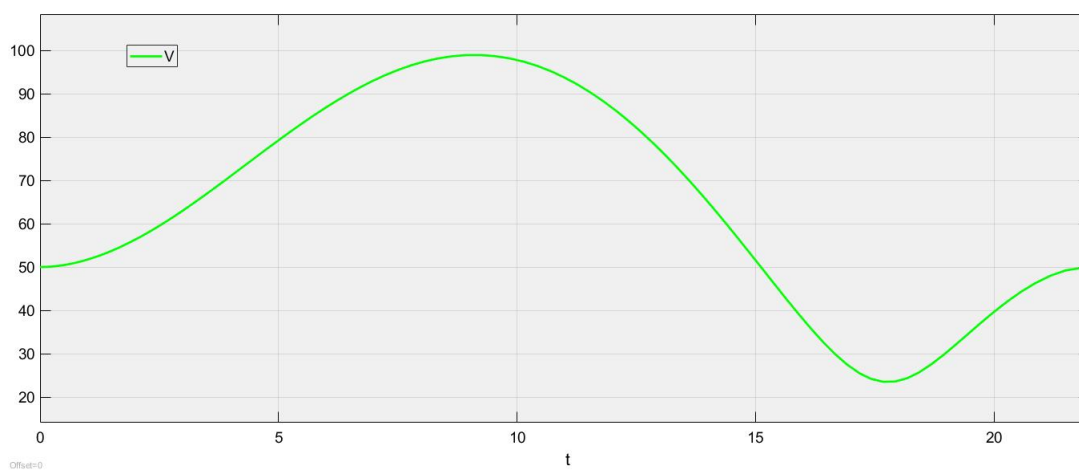


Рис. 12: График изменения скорости во времени.

ются при выполнении промоделированных маневров.

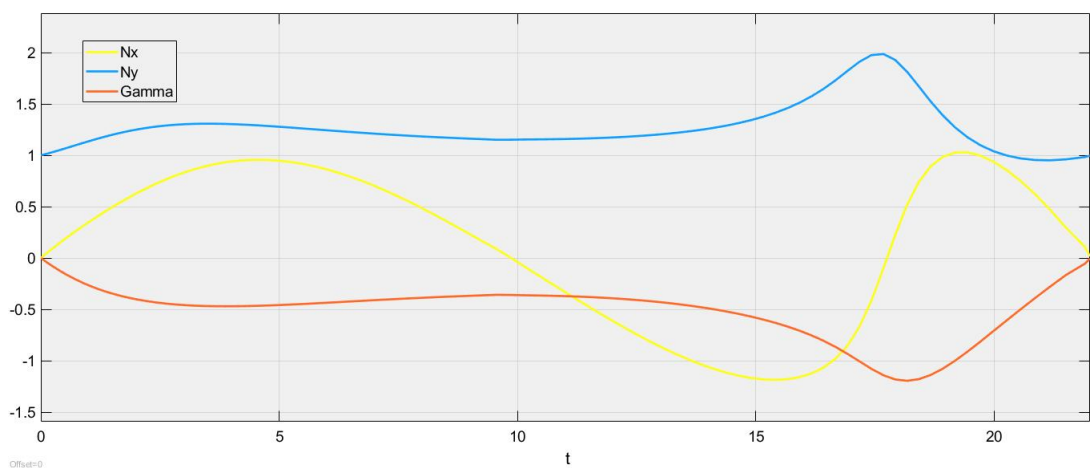


Рис. 13: График изменения управлений во времени.

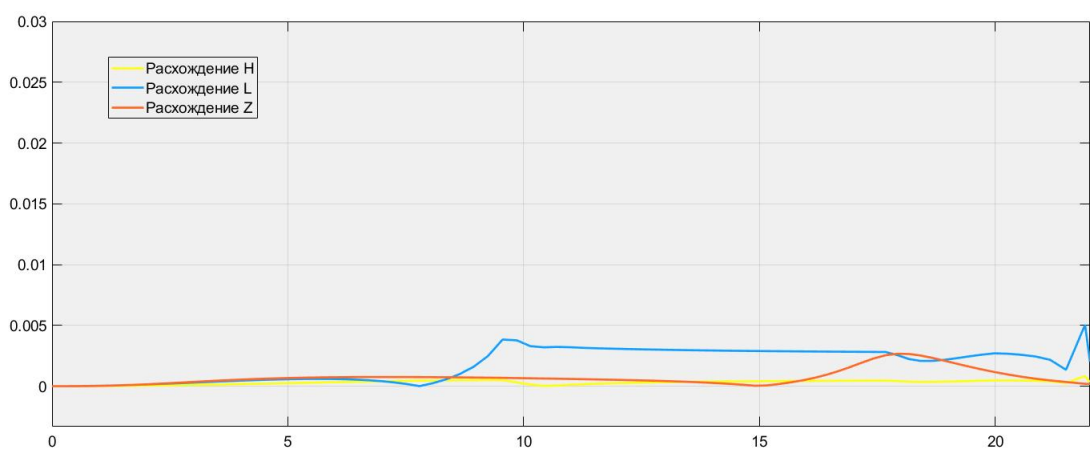


Рис. 14: График изменения ошибки траектории полёта во времени.

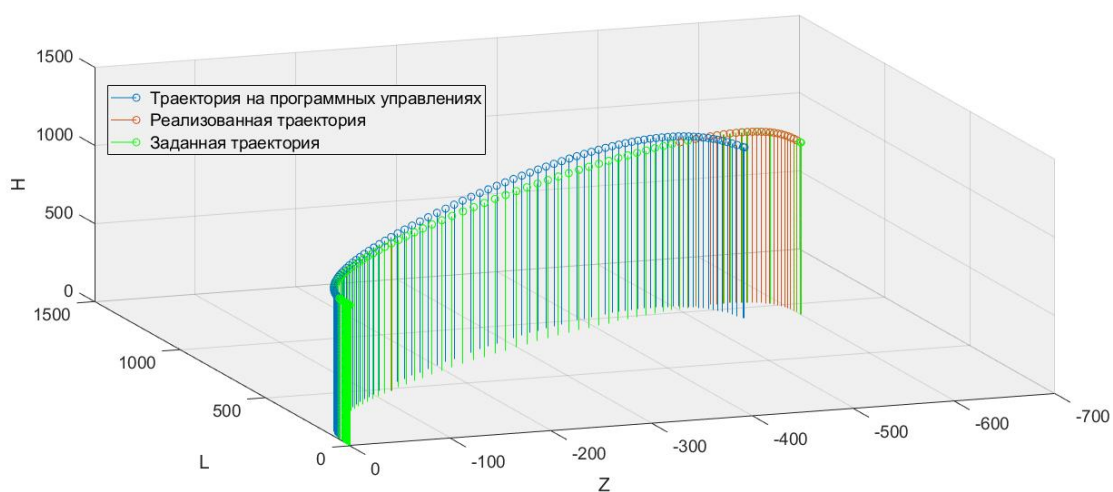


Рис. 15: Траектория полёта

8 Выводы

1. Описан вывод математической модели движения БПЛА с управлениями;
2. Рассмотрены концепции обратных задач динамики и управления с обратными связями в рамках построения управляемой системы;
3. Предложен метод поиска условно-оптимальной траектории движения беспилотника;
4. Сконструирован метод поиска управлений, реализующих заданное движение;
5. Реализована имитационная компьютерная модель движения БПЛА по построенной оптимальной траектории;
6. Проведены численные эксперименты с компьютерной моделью и приведены выводы о модели.

9 Заключение

В рамках работы проведено исследование задачи управляемого движения беспилотного летательного аппарата. На основе чего предложен алгоритм решения данной задачи с использованием принципов обратной задачи динамики, теории оптимального управления и управления с замыканием обратными связями. После чего реализована соответствующая теоретическим выкладкам компьютерная модель в среде MATLAB/Simulink.

В результате проведения численных экспериментов сделаны выводы о адекватности и практической реализуемости используемых подходов, так как полученные результаты удовлетворяют всем поставленным на задачу требованиям. Кроме того, асимптотическая устойчивость полученных решений позволяет говорить о надежности предложенных подходов.

Задача управления БПЛА представляет собой обширную область для исследований, поэтому в дальнейшем возможно развивать работу в следующих направлениях:

- Более подробное исследование областей устойчивости движения;
- Рассмотрения влияния внешних воздействий на движение;
- Создание реальных беспилотных летательных аппаратов на основе приведенных методов.

10 Список литературы

1. Канатников А.Н., Шмагина Е.А. Задача терминального управления движением летательного аппарата // Нелинейная динамика и управление, 2010. Вып.7 С. 79-94
2. Канатников А.Н., Крищенко А.П., С.Б. Ткачев Допустимые пространственные траектории беспилотного летательного аппарата в вертикальной плоскости // Наука и образование, 2012
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968.
4. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988. С. 9-18
5. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. М.: Машиностроение, 2004. С. 406
6. Моисеев В.С. Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами: монография. Казань: ГБУ Серия «Современная прикладная математика и информатика», 2013. С. 253 - 308
7. Хакимов А.Ф. Разработка системы управления удержанием БПЛА на расчетной траектории // СПбГУ, 2016
8. Официальный сайт разработчика MATLAB <http://www.mathworks.com>